UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS APLICADAS
MATEMATICAS IV
TRIMESTRE Enero- Abril 2004

PRACTICA DE SUCESIONES Y SERIES

1.- Investigue si las siguientes sucesiones son o no convergente. Si converge, calcule su límite

a) $a_n = \sqrt{n(n+2)} - n$

b) $c_o = 2, \quad c_n = \dfrac{2nc_{n-1}}{1+n^2}, si \quad n \geq 1$

c) $a_n = \dfrac{2n-1}{1+n}$

d) $a_n = \dfrac{n\,(-1)^n}{1+n}$

e) $a_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{n}$

f) $a_n = e^n 2^{(1-n)}$

g) $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{\sqrt{n^5+5n^3}}$

h) $a_n = \dfrac{n-3}{3^n}$

i) $a_n = \dfrac{\ln(1+e^n)}{n}$

j) $a_n = \dfrac{1+2+3+....+n}{n^2}$

k.- $a_n = \dfrac{\cos(1+n^3)}{n^2+1} + \dfrac{\cos(2+n^3)}{n^2+2} + \dfrac{\cos(3+n^3)}{n^2+3} + ... + \dfrac{\cos(n+n^3)}{n^2+n}$

2.- Pruebe, la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \dfrac{3n+2-\operatorname{sen} n}{n}$

b) $b_n = \dfrac{n}{2n+1}$

3) Calcule el $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, si

a) $a_n = n^{\frac{1}{n}}$

b) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+3}$

c) $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n + \dfrac{1}{a_n}) \quad a_1 = 3$

d) $a_n = \dfrac{n^2}{2n+1}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n}$

4.- Investigar la convergencia de la sucesión dada por la formula recursiva :

a) $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}, \quad a_1 = \sqrt{2}, \quad n \geq 2$.

b) $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}, \quad a_1 = 1, \; n = 1,2,3,$

c) $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} a_n; \quad a_1 = 1$

d) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{2}{a_n}); \quad a_1 = 2$

e)

$$C_o = 1, \; C_n = \left(\frac{2n^2 - 1}{1 + 3n^2} C_{n-1} \right) \quad si \text{ n} \geq 1$$

5.- Sean $\{a_n\}, \{b_n\}$, sucesiones, Se supone $\{a_n\}$ acotada, (es decir, existe M>0 $\forall n, \; |a_n| < M)$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Usar la definición de límite para probar que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

6.- Analizar la convergencia de la sucesión en término general

a) $a_n = \dfrac{1.3.5.........(2n-1)}{(2n)^n}$

b) $a_n = \dfrac{1.3.5.........(2n-1)}{2.4.6.8.....2n}$

c) $c_n = \dfrac{3n + 2 - senx}{n}$, n ≥ 1

7.- Sea a_n la sucesión definida por $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \sqrt{2\, a_n}$, si $n \geq 1$. Decidir si $\{a_n\}$, es convergente y si lo es. Hallar su límite.

8.- Demuestre que si $a > 0$, entonces la sucesión $\sqrt[n]{a}$ converge y su límite es 1.-
Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ entonces la sucesión $\sqrt[n]{a^n + b^n}$, converge y su límite es max(a,b).

9.- Investigue si la sucesión $a_n = \sqrt{n(n+2)} - n$, $a > 0$ es convergente. Si converge, calcule su límite:

10.- Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstrelo si no de un contra ejemplo.
a) Si a_n y b_n son sucesiones convergentes tales que $a_n > b_n$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$

b) Sea $\{a_n\}$ una sucesión tal que $a_n \neq 0 \quad \forall$n. Si la sucesión $\left\{ \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right\}$ converge y su límite L verifica L<1, entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge y su límite es 0.

11.- Determine si es cierta o falsa la siguiente afirmación:
“ Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones . Si $\{b_n\}$ y $\{a_n b_n\}$ convergen , entonces $\{a_n\}$ converge

EJERCICIOS DE SERIES

1 Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si es verdadera,

demuéstrelo si no dé un contra ejemplo.

a) Si la serie $\sum a_n$ converge entonces $\sum a_n^2$ converge.

b) La serie $\sum_0^{\infty} \frac{sen(n^2+n)}{n^2}$ converge absolutamente.

c) Si la serie de potencias $\sum_0^{\infty} a_n (x-2)^n$ converge para $x=-0.1,$ entonces converge para

$x=4$

d) Si la serie $\sum (a_n + b_n)$ converge, entonces $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen.

e) Si $\sum a_n$ converge y $a_n \geq 0 \ \forall n$ entonces $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

2.- Determine si la serie infinita converge o diverge. sí es convergente, calcule su suma.

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIO	RESPUESTA
1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$	1.C,4	2.- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}$	2 C, $\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5}+1)}$
3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{(100)^n}$	3. C $\frac{37}{99}$	4.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{2^n}$	4.- D
5.- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$	5. D	6.- $\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\ldots\frac{1}{(n+3)(n+4)}+..$	6. C. $\frac{1}{4}$
7.- $\frac{5}{1.2}+\frac{5}{2.3}+\ldots\frac{5}{n(n+1)}+..$	7.-C, 5	8.- $3+\frac{3}{2}+\ldots\frac{3}{n}+..$	8.- D
9.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$	9.- D	10.- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$	10.- C, $\frac{8}{7}$

3.- Determine si la serie converge o diverge

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIO	RESPUESTA
1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$	1.D	2.- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{n+2}-\frac{5}{(n+3)}\right)$	2.- C
	3.- D	4.- $\sum_{n=1}^{\infty} n\, sen\frac{1}{n}$	4.- D

3.- $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$

4.- Encuentre una formula para S_n y demuestre que la serie converge o diverge usando $\lim_{n\to\infty} S_n$

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIO	RESPUESTA
1 - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$	1.- $S_n=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]$ C, 1/2	2.- $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n}{n+1}$	2.- $S_n=-\ln(n+1); D$

5.- Use el criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIOS	RESPUESTA
1.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3+2n)^2}$	1. C	2.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}$	2 .-C
3.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+7}$	3.- D	4.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n-5)}$	4.- C
5.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$	5.- D	6.- $\sum_{n=1}^{\infty} n\,2^{-n^2}$	6.- C
7.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}$	7.- D	8.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$	8.-D

6.- Use el criterio de comparación para determinar si la serie converge o diverge.

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIO	RESPUESTA
1.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}$	1.C	2.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2-7}{e^n(n+1)^2}$	2.-C
3.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,3^n}$	3.- C	4.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n}{1+3^n}$	4.- C
5.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+n^2}{n^3+1}$	5.- D	6.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\cos n}{n^2}$	6.-C
7.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+4}$	7.- D	8.- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^3}{(n^3+1)^2}$	8.-C

9.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3 - 5n}}$	9.-C	10.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{5n^2 + 1}}$	10.-D
11.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$	11.-C	12.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$	12.- D

7.- Encuentre los números reales p para los que la serie converge.

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIO	RESPUESTA
1.- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$	1.	2.- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$	

8.- Use el criterio de la razón o de la raíz para determinar si la serie converge o diverge.

EJERCICIO	RESPUESTA	EJERCICIO	RESPUESTA
1.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{2^n}$	1.C	2.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{arctgn}{n^2}$	2.-C
3.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(3^{n+1})}$	3.- D	4.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^3 + e^n}$	4.-C
5.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$	5.- C	6.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{10^n}$	6.-D
7.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$	7.- D	8.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$	8.-C
9.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}$	9.-C	10.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{(1.01)^n}$	10.-C
11.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$	11.-C	12.- $\sum_{n=1}^{\infty} n \, tg \frac{1}{n}$	12.-D

9.- Determinar si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente

a) $-1 + \frac{4}{5} + \frac{9}{15} + \frac{16}{29} + \frac{25}{47} + \frac{36}{69}$	b) $\sum_{1}^{n} (-1)^{n+1} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \mathrm{R}^+$
c).- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{n!}$	d).- $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln\left(\mathrm{a} + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{n}}\right)\right]^n$,donde $b \geq 0, \ \mathrm{a} \geq 1$
e).- $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}$	

10.- Determine los valores de " p " para los cuales la serie converge.

a) $\sum_{3}^{\infty} \frac{Ln(n)}{n^p}$ b) $\sum_{3}^{\infty} \frac{1}{(nLn(n))^p}$

c) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ d) $\sum_{0}^{\infty} (\sqrt{n^p+1} - \sqrt{n^p})$

11.- Encuentre el conjunto de convergencia de la serie $1+x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\frac{x^4}{\sqrt{4}}+\frac{x^5}{\sqrt{5}}+.....$

12. - Encuentre una fórmula para $R_6(x)$, el residuo del polinomio de Taylor de orden 6 en a y estime $|R_6(0,5)|$, para f(x)=sen(x) y a=1.

13.- Encuentre los términos (hasta el quinto) de la serie de Maclaurin correspondiente a $f(x) = Cosx\ln(1+x)$.

14.- Pruebe que si $\sum a_n$ Diverge y $\sum b_n$ converge entonces $\sum (a_n + b_n)$ Diverge.

15.- ¿ Converge o diverge la serie

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{k-1}{2k+1}$ b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

e.- $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^2$

16. - Demuestre que la serie alternante $\sum_{N=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$ converge y estime el error cometido al usar la suma parcial S_9 como aproximación de la suma S.

17.-Clasifique la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ como absolutamente convergente, condicionalmente convergente o convergente.

18. Determine el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,3^n}(x-2)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)\frac{x^n}{\sqrt{n}}$

c) $S=\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\,6^n}(2x-1)^n$

Además, para $x=1$ obtener un valor aproximado de la suma con un error de magnitud menor que 10^{-3}

d.- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,3^n}(2x+1)^n$

19.- Para las siguientes funciones hallar una representación en series de potencias e indicar su radio de convergencia.

a) $f(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}$

b) $f(x)=x^3 arctn(x)$

c) $f(x)=x\,e^{x^2}$

20.- Obtener los tres primeros términos de la serie de Mac Laurin correspondiente a las siguientes funciones y dar su radio de convergencia:

a) $f(x)=e^{-x}\cos x$

b) $f(x)=2-\operatorname{sen} x$

c) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

d) $f(x)=Cosx\,\ln(1+x)$.

21.- Sea $f(x)=\cos^2 x$

a) Hallar la serie de Mac Laurin de f(x) y su radio de convergencia.
b) Escribir una suma parcial que aproxima a $f(x)=\cos^2\frac{1}{2}$ con un error de magnitud menor que $\frac{1}{2}10^{-2}$

22.- Sea $f(x)=\ln\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^3\right)$.

a) Halle la serie de Maclaurin de f y su radio de convergencia.
b) Escriba una suma parcial que aproxime a $\ln(1+(0,5)^4)$ con un error de magnitud menor que 10^{-3}
c) Dar el valor de $f^{(12)}(0)$

23.- a) Obtener una representación en series de potencia alrededor de x=0 de

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x}, & \text{si x} \neq \text{o} \\ 1 & \text{si x} = 0 \end{cases}$$ y su radio de convergencia

24.- Para la serie de potencias $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$ determine el conjunto de puntos de " x "

tales que la serie converge y calcule su suma.